

- Dans cette séance on va voir 07.11
- (i) notion de vecteur et valeur propre $\leftarrow$ voir feuille 45)
 - (ii) exemples de vecteurs et valeurs propres.
 - (iii) notion d'espace propre
 - (iv) notion de polynôme caractéristique
 - (v) plus d'exemples $\leftarrow$ comment calculer valeurs et vecteurs propres

Chapitre 10 Valeurs et vecteurs propres

Idee des valeurs propres / vecteurs propres

Déf Une homothétie est une application $H: V \rightarrow V$, pour V un $\mathbb{K}V$, qui associe $\lambda \cdot v$ à $v \implies$ toute homothétie est une app. lin.
 λ rapport de l'homothétie

Informel

Un vecteur propre de T détermine une direction de V pour laquelle T se comporte comme une homothétie de rapport λ donné par la valeur propre associée.

Exemple 10.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

• Si $\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, on voit que

$$A \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4 \cdot \bar{v}$$

$\implies \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre avec valeur propre -4 .

• Si $\bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a

$$A \cdot \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre de A .

"Meilleur" exemple possible | Exemple 10.4

Si $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ est diagonale

on écrit parfois
 $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$

alors $A \cdot \bar{e}_i = d_i \cdot \bar{e}_i, \forall i=1, \dots, n \Rightarrow \bar{e}_i$ est vecteur propre de A
de valeur propre d_i !

On voudrait une base formée
de vecteurs propres ...

Première observation: on peut avoir plusieurs vecteurs propres pour
la même valeur propre et qui forment un
ensemble libre. ∇

Définition 10.8 | Soit $T: V \rightarrow V$ / $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une app. lin / matrice.
Soit λ une valeur propre de T/A . On définit l'espace propre
associé à $\lambda \in \mathbb{R}$:
 $E_\lambda := \{v \in V : T(v) = \lambda v\} \subseteq V$ / $E_\lambda := \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \bar{v} = \lambda \bar{v}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

⚠ Si $v \in V$ est vecteur propre de T avec valeur propre λ , alors $v \in E_\lambda$.

Si $v \in E_\lambda$ et $v \neq 0_V$, alors v est un vecteur propre de T avec valeur propre λ .

Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors
 $E_\lambda = \text{Vect}\{v\}$
 $\uparrow$
 vecteur propre de T avec valeur propre λ

Mais comment calculer les espaces propres???

(On va travailler désormais avec des matrices pour simplifier)
 ⚠ en général

Point fondamental
 Lemme 15

$$E_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \cdot \text{id}_V) \leftarrow \text{par } T: V \rightarrow V \text{ app. lin}$$

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \leftarrow \text{pour } A \in M_n(\mathbb{R})$$

(Preuve) On fait la preuve pour matrices $\leftarrow$ le cas des app. lin est pareil.

$$\bar{v} \in E_\lambda \iff A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v} \iff A \bar{v} - \lambda \bar{v} = 0$$

$$\Downarrow \iff (A - \lambda \cdot I_n) \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{v} \in \text{Ker}(A - \lambda I_n). \square$$

Critère pour calculer des valeurs propres:

Thm. 10.14 | Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$(Preuve) \lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$$

$$\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inj} \iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inv}$$

$$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \quad \square$$

Exemple 10.3 (suite) + 10.15 Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, on calcule

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28 = (\lambda + 4)(\lambda - 7)$$

polynôme de degré
 $n=2$ ∇ ∇

↙ On va toujours avoir un polynôme de degré n

Définition 10.16 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le polynôme

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

est le polynôme caractéristique de A .

Si l'on met le Thm 10.14 avec la définition précédente:

① Valeurs propres de A = racines du polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

tandis que le Lemme 15 nous dit que

② Espace propre E_λ associé à valeur propre λ = $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$

(on calcule en général une base de E_λ ∇)

Exemple 10.20 On veut les valeurs propres et espaces propres

de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

① Calculer $P_A(\lambda)$ et les racines

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

dév. 1ère
colonne

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] + [\lambda - 1 - 1] - [1 + 1 - \lambda]$$

$$= (1-\lambda) [-2\lambda + \lambda^2] + 2(\lambda - 2) = (1-\lambda) \cdot \lambda (\lambda - 2) + 2(\lambda - 2)$$

$$= (\lambda - 2) \cdot [\lambda - \lambda^2 + 2] = (\lambda - 2) \cdot [-(\lambda - 2)(\lambda + 1)]$$

$$= -(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)^2$$

Hence: valeurs propres $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$
de A

② Calculer les espaces propres

$$\bullet \boxed{\lambda = -1} \Rightarrow E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

48

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathbb{F}_{-1} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

↑ à scalaire près "un seul" vecteur propre !!!

$$\bullet \boxed{\lambda = 2} \Rightarrow \mathbb{F}_2 = \text{Ker}(A - 2 \cdot \mathbb{I}_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathbb{F}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2 - x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

deux vecteurs propres
non colinéaires

